Ann. Glob. Analysis and Geometry
Vol. 1, No. 2 (1983), 105-118

CONSTRUCTION DES APPLICATIONS HARMONIQUES NON RIGIDES D'UN TORE DANS LA SPHÈRE

Gábor Tóth

Le but de l'article présent est l'étude des déformations harmoniques géodésiques f d'un tore dans la sphère avec la densité d'énergie $1/2$. Nous montrons que tout les déformations harmoniques sont isométriques, c'est-à-dire que l'application f est rigide, si et seulement si f est totalement géodésique. De plus nous calculons les espaces de déformations harmoniques pour la 3-sphère.

1. Introduction

Un théorème récent de T. Sunada [7] affirme que si $f,f' : M \to M'$ sont des applications harmoniques homotopiques d'une variété riemannienne M compacte dans une variété riemannienne M' complete, localement symétrique à courbure riemannienne non positive, les applications $\tilde{f},\tilde{f}' : \tilde{M} \to \tilde{M}'$ induites entre des revêtements universels sont différent d'une isométrie de $\tilde{M}'$. Comme l'unicité de Hartman n'a pas lieu dans le cas où M' a courbure riemannienne non négative [3], les applications harmoniques ne sont pas rigides au sens susmentionné. Cependant en utilisant une déscription d'isométries infinitésimales du à A. Lichnerowicz [6], nous avons démontré dans [9] que les submersions riemanniennes $f: M \to S^n$ sur la sphère unité sont localement rigides, c'est-à-dire que si v est une déformation harmonique de f il existe un group à un paramètre d'isométries (φ_t) tel que $f_t=\varphi_t \circ f$ pour tout $t \in R$ (voir aussi Proposition 2 plus bas).

L'objectif principal de l'article présent est l'étude de tout les déformations harmoniques des applications harmoniques $f\colon T^2 \to S^n$ du tore plat dans S^n, $n \geq 3$, avec la densité d'énergie $e(f) = 1/2$. Il en résulte, que nous pouvons construir une famille à un paramètre d'applications harmoniques $f_t\colon T^2 \to S^n$ telle que f_t est localement rigide si et seulement si $t \notin \pi/2\, Z$.

Le travail [2] forme la base principale de cette article. Nous appliquons les conventions des signes utilisées dans [5]. En concernant certaines constructions employées nous nous referons aux travaux [8] et [9].

Je tiens à remercier Monsieur J. Eells qui m'a donné de nombreux conseils pendant l'élaboration de ce travail.

2. Préliminaires

Soit M une variété riemannienne compacte, orientée, de dimension m, de tenseur métrique $\langle\ ,\ \rangle$ et soit $f\colon M \to S^n$, $n \geq 2$, une application de la classe C^∞ dans la sphère unité $S^n \subset R^{n+1}$ munie de la métrique canonique. Un champ de vecteurs $v \in C^\infty(f^*(T(S^n)))$ le long de f définit une déformation (géodésique) $t \mapsto f_t = \exp \circ (t\, v)$, $t \in R$, de l'application f. On peut décrire cette déformation en utilisant des tenseurs sur M à valeurs dans $f^*(T(S^n))$ par la méthode suivante [8], [9].

Nous considérons le fibré vectoriel $F^t = (f_t)^*(T(S^n))$ induit par f_t. Sur F^t existe une connection naturelle ∇^t déduite de la connection riemannienne de S^n. La métrique euclidienne de S^n définit au moyen de f_t une métrique $\langle\ ,\ \rangle_t$ sur les fibres de F^t et ∇^t est riemannienne par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_t$. Si $t', t'' \in R$ il existe une isomorphisme canonique $\tau_{t''}^{t'} = \tau_{t''}^{t'}[v]\colon F^{t'} \to F^{t''}$ défini par le transport parallel le long des géodésiques $t \mapsto f_t(x)$, $t \in [t', t'']$ (ou $[t'', t']$), $x \in M$. Pour simplifier les notations le produit tensoriel $\tau_{t''}^{t'}[v] \otimes \mathrm{id}\colon F^{t'} \otimes \Lambda^*(T^*(M)) \to F^{t''} \otimes \Lambda^*(T^*(M))$ sera noté par $\tau_{t''}^{t'}$ et nous omettons 0 dans f_0, $\tau_0^{t'}$, etc. En utilisant l'équation de Jacobi pour la déformation $t \mapsto f_t$ nous obtenons que pour la 1-forme $P_v(t) = \tau^t (f_t)_* \in C^\infty(F \otimes T^*(M))$ à valeurs dans F,

$$(*) \qquad P_v(t) = \langle f_* + t\, dv, \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|} + \cos(t\|v\|)\left(f_* - \langle f_*, \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|}\right) + \frac{\sin(t\|v\|)}{\|v\|}\left(dv - \langle dv, \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|}\right)$$

(si $v_x = 0$ nous posons $P_v(t) = f_* + t\,dv$ en $x \in M$) où d est la différentiation extérieure de $F \otimes \Lambda^*(T^*(M))$. Ensuite, pour tout $w \in C^\infty(F)$, on a l'identité

$$(**)\quad (\tau^t \circ \nabla^t \circ {}^-\tau_t)w - \nabla w = \langle \int_0^t P_v(s)ds, w \rangle \; v - \langle v, w \rangle \int_0^t P_v(s)ds$$

(voir [8]).

Un champ de vecteurs v le long de f est appelé une déformation harmonique si l'application $f_t = \exp\circ\,(tv): M \longrightarrow S^n$ est harmonique pour tout $t \in R$ [2]. En utilisant le calcul explicite de la tension $\tau(f_t) = \operatorname{trace} \nabla^t (f_t)_*$, au moyen de l'identité (**), nous obtenons un caractérisation algébrique des déformations harmoniques par la proposition suivante [9].

Proposition 1. Soit $f: M \longrightarrow S^n$ une application harmonique. Un champ de vecteurs v le long de f est une déformation harmonique si et seulement si $\|v\| = \text{const.}$ et v vérifie:

(i) $\operatorname{trace} \{\langle f_*, v \rangle f_*\} - \operatorname{trace} \|f_*\|^2 v = \nabla^2 v$,

(ii) $\operatorname{trace} \langle f_*, dv \rangle = 0$.

Les solutions de l'équation (i) qui forment un espace vectoriel $J(f)$ de dimension fini sont appelées des champs de Jacobi le long de f [2]. Nous désignons par $K(f)$ le sous-espace vectoriel de $J(f)$ défini par les solutions des équations (i) et (ii).

Proposition 2. Soit $f: M \longrightarrow S^n$ une application harmonique. Si $X \in so(n+1)$ est une isométrie infinitésimale de S^n on a $X \circ f \in K(f)$. Inversement, si $f: M \longrightarrow S^n$ est une submersion harmonique riemannienne et $v \in K(f)$ est projectable, c'est-à-dire que $f(x) = f(x')$ implique $v_x = v_{x'}$, $x, x' \in M$, on a $v = X \circ f$ où $X \in so(n+1)$.

Démonstration. Désignons par (φ_t) le groupe à une paramètre d'isométries induit par $X \in so(n+1)$. Comme l'application $\varphi_t \circ f : M \longrightarrow S^n$ est harmonique pour tout $t \in R$ on a $\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t \circ f)_{t=0} = X \circ f \in J(f)$ [2] et si $\{e^1, \dots, e^m\} \subset T_x(M)$ est une base orthonormale en $x \in M$ on voit

$$\operatorname{trace} \langle f_*, \nabla(X \circ f) \rangle_x = \sum_{i=1}^m \langle f_*(e^i), \nabla_{e^i} (X \circ f) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \langle f_*(e^i),\ \nabla_{f_*(e^i)} X \rangle = 0\ ,$$

[5] (le champ X est une isométrie infinitésimale si et seulement si $\langle .,\nabla X\rangle$ est antisymétrique), c'est-à-dire $X\circ f \in K(f)$.

La démonstration de l'affirmation inverse peut se trouver dans [9] (Théorème 2).

Nous remarquòns que par la dernière proposition on a $K(id_{S^n})=so(n+1)$, en particulier $\dim\ K(id_{S^n}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 2 nous suggère l'introduction de la définition suivante.

Une application harmonique $f : M\to S^n$ est appelée infinitésimalement rigide si pour tout champ de vecteurs projectable $v\in K(f)$ il existe une isométrie infinitésimale $X\in so(n+1)$ telle que $v = X\circ f$. D'après la Proposition 2 toute submersion harmonique riemannienne est infinitésimalement rigide.

Proposition 3. Si le plongement harmonique $f : M\to S^n$ èst infinitésimalement rigide on a

$$\dim K(f) \leqq \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Démonstration. Définissons l'application linéaire $\Phi:so(n+1)\to C^\infty(F)$ par $\Phi(X) = X\circ f, X \in so(n+1)$. Selon la Proposition 2 l'image de Φ est contenue dans $K(f)$. Comme f est infinitésimalement rigide on a $\mathrm{im}\ \Phi = K(f)$ et la preuve est terminée.

Remarque. Car les composantes connexes de $\mathrm{Zero}(X)$ des champs isométries infinitésimales X sont des sousvariétés totalement géodésiques, on peut écrire dans l'inégalité le signe = justement si f est pleine, c'est-à-dire il n'existe pas une sous-variété propre totalement géodésique de S^n qui contiendrait $\mathrm{im}\ f$.

Soit $f:M\to S^n$ une application harmonique. Nous désignons par $V(f)\subset K(f)$ l'ensemble des déformations harmoniques de f , c'est-à-dire que nous posons

$$V(f) = \{v\in K(f)\ \big|\ \|v\| = \text{const.}\}\ .$$

Évidemment $\mathbb{R}\,V(f)\subset V(f)$ mais $V(f)$ n'est pas forcément un sous-espace vectoriel de $K(f)$. (Voir le théorème ci-dessous.) Soit $\{L_\lambda\ |\ \lambda\in\Lambda\}$ l'ensemble de sous-espaces vectoriels maximals contenus dans $V(f)$. Ainsi $G(f) = \{K(f)\} \cup \bigcup_{\Gamma \subset \Lambda} \{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma\}$ est ordonné partiellement par inclusion (avec l'élément maximal $\{K(f)\}$) . $G(f)$ est appelé le treillis géométrique de f . Il est clair que la fonction $\dim: G(f) \longrightarrow Z_+$ est croissante.

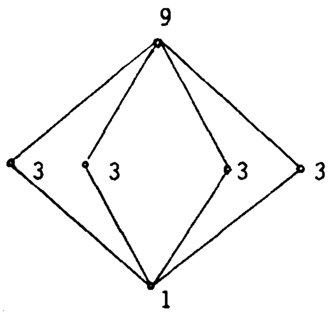
L'application harmonique $f:M \longrightarrow S^n$ est localement rigide si pour toute déformations harmoniques projectables v de f il existe un groupe (φ_t) à un paramètre d'isométries de S^n (induit par une isométrie infinitésimale $X \in so(n+1)$) tel que $f_t = \exp \circ (tv) = \varphi_t \circ f$, $t \in R$. Vu la Proposition 2 toute submersion harmonique riemannienne est localement rigide. On entrevoit facilement la proposition suivante:

Proposition 4. Soit $f:M \longrightarrow S^n$ un plongement localement rigide. Si $\operatorname{span} V(f) = K(f)$ l'application f est infinitésimalement rigide.

Nous énoncons:

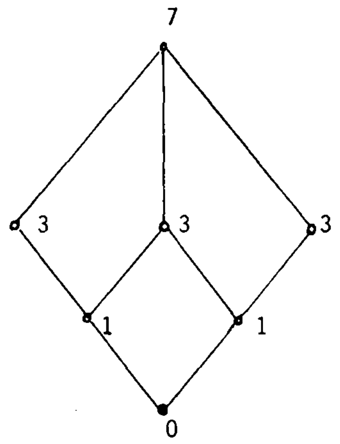
Théorème. Il existe un plongement harmonique $f:T^2 \longrightarrow S^n$ $n \geqq 3$, tel que f n'est ni infinitésimalement ni localement rigide et la densité d'énergie $e(f) = 1/2 \operatorname{trace} \| f_* \|^2$ est $1/2$. Plus précisément, si $f:T^2 \longrightarrow S^n$, $n \geqq 3$, est une application harmonique, $e(f) = 1/2$, les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) f est infinitésimalement rigide,
(ii) f est localement rigide,
(iii) $\operatorname{rank} f \leqq 1$,
(iv) f est totalement géodésique.
De plus, si $n=3$, les treillis géométriques de $f:T^2 \longrightarrow S^3$ sont de la forme

G(f)



si $\operatorname{rank} f \leqq 1$, et de la forme

G(f)



si max rank $f = 2$, où les entiers sont de valeurs de la fonction $\dim : G(f) \longrightarrow Z_+$. En tout cas $(n=3)$ on a $\operatorname{span} V(f)=K(f)$..

Remarque. Si $v \in V(f)$ on a $e(\exp \circ (tv))=e(f)$ pour tout $t \in R$ [9].

3. Démonstration du théorème

Soit $f: T^2 \longrightarrow S^3$, $n \geqq 3$, une application harmonique. En désignant par $\tilde{f} : T^2 \longrightarrow R^{n+1}$ la composition de f avec l'inclusion canonique $S^n \subset R^{n+1}$ on a [2]

$$\Delta\tilde{f} + 2\, e(f)\, \tilde{f} = 0 .$$

Si $e(f)=1/2$ nous obtenons que les composantes $\tilde{f}^i : T^2 \longrightarrow R$, $i=1,\dots,n+1$, de $\tilde{f}$ sont des fonctions propres du laplacien sur T^2 , c'est-à-dire [1] qu'ils existent de vecteurs $a,b,c,d \in R^{n+1}$ tels que

$$\tilde{f}(\varphi,\Psi) = a \cos\varphi + b \sin\varphi + c \cos\Psi + d \sin\Psi , \quad 0 \leqq \varphi,\Psi < 2\pi ,$$

où φ et Ψ sont les paramètres canoniques du tore T^2 . Comme $\|\tilde{f}\|^2 = 1$ sur T^2 , un calcul facile montre que les vecteurs $a,b,c,d \in R^{n+1}$ sont mutuelment orthogonaux vérifiants les rélations

$$\|a\| = \|b\|,\ \|c\| = \|d\| \quad \text{et} \quad \|a\|^2 + \|c\|^2 = 1\ .$$

En posant $\|a\| = \cos t$ et $\|c\| = \sin t$, $0 \leqq t \leqq \pi/2$, il existe une isométrie $g \in O(n+1)$ telle que $g(a) = \cos t\ e_1$, $g(b) = \cos t\ e_2$, $g(c) = \sin t\ e_4$ et $g(d) = \sin t\ e_3$, où $\{e_1, \ldots, e_4\} \subset R^4 \subset R^{n+1}$ est la base canonique. Il en découle que nous nous pouvons limité à l' étude des applications harmoniques $f_t: T^2 \longrightarrow S^n$ définis par

$$\tilde{f}_t(\varphi,\Psi) = \cos t \cos\varphi\, e_1 + \cos t \sin\varphi\, e_2 + \sin t \sin\Psi\, e_3 + \sin t \cos\Psi\, e_4\ ,$$

$$0 \leqq \varphi,\Psi < 2\pi\ ,$$

où $0 \leqq t < \pi/2$. On voit facilement que, pour $0 < t < \pi/2$, $f_t: T^2 \longrightarrow S^n$ est un plongement harmonique non totalement géodésique et, pour $t=0$, $\pi/2, f_t: T^2 \longrightarrow S^n$, est une submersion riemannienne totalement géodésique sur un cercle principal de S^n , en particulier (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Dès lors la démonstration est divisée en deux parties:

1. Rigidité infinitésimale et locale de $f_t: T^2 \longrightarrow S^n$, $t=0$, $\pi/2$, et la détermination de $G(f_t)$ dans le cas $n=3$.
2. Non rigidité de $f_t: T^2 \longrightarrow S^n$, $0 < t < \pi/2$ et la détermination de $G(f_t)$ dans le cas $n=3$.

1. Sans resteindre la généralité il suffit d'étudier le cas $t=0$. Alors $f_0 = p \circ i$, où $p: T^2 \longrightarrow S^1$ est la projection canonique, $p(\varphi,\Psi) = \varphi$, $0 \leqq \varphi,\Psi < 2\pi$, et $i: S^1 \longrightarrow S^n$ est l'inclusion canonique, $i(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0, \ldots, 0) \in S^n \subset R^{n+1}$. Soit W^0 le champ des vecteurs unités tangents à l'image de i et soit $\{W^1, \ldots, W^{n-1}\}$ le système des sections paralleles du fibré vectoriel normal à i défini par le système $\{e_3, \ldots, e_{n+2}\} \subset R^{n+1}$ orthonormal des vecteurs de base canoniques. En posant $w^i = W^i \circ p$, $i=0,\ldots, n-1$, si $v \in C^\infty(F)$, $F = f_0^*(T(S^n))$, on a la décomposition orthogonale

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, w^i\ ,$$

où α_i , $i=1,\ldots,n-1$, sont scalaires sur T^2 . En tenant compte de la définition de $K(f_0)$ un calcul facile montre que $v \in K(f_0)$ si et seulement si

$$\alpha_0 = \text{const.} \quad \text{et} \quad \nabla^2 \alpha_i + \alpha_i = 0 \ , \ i=1,\dots,n-1 \ ,$$

où v admet la décomposition ci-dessus. Ainsi, si $v \in K(f_0)$ on a

$$v_{(\varphi,\Psi)} = \alpha_0 \, w^0_{(\varphi,\Psi)} + \sum_{i=1}^{n-1} (p_i \sin\varphi + q_i \cos\varphi + r_i \sin\Psi + \\ + s_i \cos\Psi) w^i_{(\varphi,\Psi)} \ , \quad 0 \leqq \varphi,\Psi < 2\pi \ ,$$

où $\alpha_0, p_i, q_i, r_i, s_i \in R$, $i=1,\dots,n-1$, en particulier $\dim K(f_0)=4(n-1)+1$. Si $v \in K(f_0)$ est projectable on a $r_i=s_i=0$, $i=1,\dots,n-1$. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_0 & -q_1 & \cdots & -q_{n-1} \\ \alpha_0 & 0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \\ q_1 & p_1 & & & \\ \cdots & & & Y & \\ q_{n-1} & p_{n-1} & & & \end{bmatrix} \in so(n+1)$$

est une isométrie infinitésimale, $Y \in so(n-1)$ étant arbitraire en ce moment, et en identifiant les vecteurs tangents à $S^n \subset R^{n+1}$ par leur transports parallels à l'origine, nous déduisons pour $x=(\cos\varphi , \sin\varphi , 0,\dots,0) \in S^1$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$:

$$A_x = A\,x = (-\alpha_0 \sin\varphi , \alpha_0 \cos\varphi , p_1 \sin\varphi + q_1 \cos\varphi ,\dots, \\ p_{n-1} \sin\varphi + q_{n-1} \cos\varphi) = v_{(\varphi,\Psi)} \ .$$

Alors l'application $f_0 : T^2 \longrightarrow S^n$ est infinitésimalement rigide.

Si, de plus, $v \in V(f_0)$ nous obtenons par un calcul facile que $\langle p,q \rangle = 0$ et $\|p\|^2 = \|q\|^2$ où $p=(p_1,\dots,p_{n-1})$ et $q=(q_1,\dots,q_{n-1})$, i.e. la première et la deuxième colonnes de A sont orthogonaux avec la même norme. Selon un résultat de [10] (Théorème 2) il existe une $Y \in so(n-1)$ telle que la rélation $A^2x=-\|v\|^2 x$ est valable pour chaque $x \in S^1 \subset S^n$, autrement dit la courbe intégrale $t \mapsto \exp(At)x$, $t \in R$, d'isométrie infinitésimale A est une géodésique de S^n . Nous pouvons déduire que $\exp \circ (tv) = \varphi_t \circ f_0$, $t \in R$, où (φ_t) est le est le groupe des isométries induit par $A \in so(n+1)$, i.e. l'application $f_0 : T^2 \longrightarrow S^n$ est localement rigide. Nous déterminons $G(f_0)$ en le cas $n=3$. On sait que $\dim K(f_0)=9$ et $v \in K(f_0)$ si et seulement si

$$v = \alpha_0 \, w^0 + \alpha_1 \, w^1 + \alpha_2 \, w^2 ,$$

où α_0 = const. et

$$\alpha_i(\varphi,\Psi) = p_i \sin\varphi + q_i \cos\varphi + r_i \sin\Psi + s_i \cos\Psi ,$$

$0 \leqq \varphi,\Psi < 2\pi$, $p_i, q_i, r_i, s_i \in R$, $i=1,2$. De plus, $v \in V(f_0)$ si et seulement si

$$p_1q_1 + p_2q_2 = p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2 = 0 ,$$

$$r_1s_1 + r_2s_2 = r_1^2 + r_2^2 - s_1^2 - s_2^2 = 0$$

et soit $p_1=p_2=q_1=q_2=0$ soit $r_1=r_2=s_1=s_2=0$. On en déduit

$$V(f_0)=\mathrm{span}\{v^0,v^1,v^2\} \cup \mathrm{span}\{v^0,v^3,v^4\} \cup \mathrm{span}\{v^0,v^5,v^6\} \cup \mathrm{span}\{v^0,v^7v^8\} ,$$

où $v^0=w^0$ et

$$\begin{aligned}
v^1 &= \sin\varphi \, w^1 + \cos\varphi \, w^2 , \\
v^2 &= -\cos\varphi \, w^1 + \sin\varphi \, w^2 , \\
v^3 &= \sin\varphi \, w^1 - \cos\varphi \, w^2 , \\
v^4 &= -\cos\varphi \, w^1 - \sin\varphi \, w^2 , \\
v^5 &= \sin\Psi \, w^1 + \cos\Psi \, w^2 , \\
v^6 &= -\cos\Psi \, w^1 + \sin\Psi \, w^2 , \\
v^7 &= \sin\Psi \, w^1 - \cos\Psi \, w^2 , \\
v^8 &= -\cos\Psi \, w^1 - \sin\Psi \, w^2 .
\end{aligned}$$

En particulier le treillis géométrique de l'application $f_0 : T^2 \longrightarrow S^3$ est de la forme décrite plus haut et on obtient aisément que $\mathrm{span}\, V(f_0)=K(f_0)$, ce qui termine la démonstration de la première partie.

2. Nous considérons d'abord le cas $n=3$. La forme explicite ci-dessus de $\tilde{f}_t$ montre que $f_t=\exp\circ(t\, v^5)$. Choisissons une base orthonormale de champs de vecteurs le long de f_t par

$$u^0 = \tau_t[v^5](v^0)\ ,\ u^1 = \tau_t[v^5](v^5)\ ,\ u^2 = \tau_t[v^5](v^6)\ .$$

Par suite, tout champ de vecteurs $v\in C^\infty(F^t)$ admet la décomposition orthogonale

$$v = \beta_0 u^0 + \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2\ ,$$

où β_0, β_1, β_2 sont scalaires sur T^2. D'après la démonstration du Lemme 4 dans [9] on sait que $u^0,u^1,u^2\in V(f_t)$. En supposant $v\in K(f_t)$ l'équation (i) de la Proposition 1 s'écrit

$$(\nabla^2\beta_0)v^0 + (\nabla^2\beta_1)v^5 + (\nabla^2\beta_2)v^6 + 2\ \mathrm{trace}\ \{(\tau^t\circ\nabla^t\circ\tau_t)$$

$$v^0\otimes d\beta_0 + (\tau^t\circ\nabla^t\circ\tau_t)v^5\otimes d\beta_1 + (\tau^t\circ\nabla^t\circ\tau_t)v^6\otimes d\beta_2\} = 0\ ,$$

où $\tau^{t'}_{t''} = \tau^{t'}_{t''}[v^5]$. Désignons par $E^1 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ et $E^2 = \frac{\partial}{\partial\Psi}$ les champs de vecteurs associés au système de cordonnées canoniques de T^2. D'après l'identité (**) on a

$$(\tau^t\circ\nabla^t\circ\tau_t)v^0\otimes d\beta_0 = \langle \int_0^t P_{v^5}(s)ds, v^0\rangle\ v^5\otimes\beta_0\ ,$$

où $P_{v^5}(s) = \cos s\ f_* + \sin s\ dv^5$ (*) et ainsi

$$\mathrm{trace}\ \{(\tau^t\circ\nabla^t\circ\tau_t)v^0\otimes d\beta_0\} = \sin t\ E^1(\beta_0)v^5\ .$$

Nous obtenons de la même façon les rélations

$$\mathrm{trace}\ \{(\tau^t\circ\nabla^t\circ\tau_t)v^5\otimes d\beta_1\} = -\sin t\ E^1(\beta_1)v^0 - \cos t\ E^2(\beta_1)v^6\ ,$$

$$\mathrm{trace}\ \{(\tau^t\circ\nabla^t\circ\tau_t)v^6\otimes d\beta_2\} = \cos t\ E^2(\beta_2)v^5\ ,$$

c'est-à-dire $v \in C^\infty(F^t)$ est un champ de Jacobi de long de f_t si et seulement si β_0, β_1, β_2 vérifient:

(1) $$\nabla^2 \beta_0 - 2 \sin t\, E^1(\beta_1) = 0 ,$$

(2) $$\nabla^2 \beta_1 + 2 \sin t\, E^1(\beta_0) + 2 \cos t\, E^2(\beta_2) = 0 ,$$

(3) $$\nabla^2 \beta_2 - 2 \cos t\, E^2(\beta_1) = 0 .$$

Deuxièmement, l'équation (ii) de la Proposition 1 s'écrit

$$0 = \operatorname{trace} \langle (f_t)_* , dv \rangle = \operatorname{trace} \langle P_{v^5}(t), v^0 \otimes d\beta_0 + v^5 \otimes d\beta_1 + v^6 \otimes d\beta_2 \rangle =$$

$$= \cos t\, E^1(\beta_0) - \sin t\, E^2(\beta_2) .$$

On en conclut que $v \in K(f_t)$ si et seulement si β_0, β_1 et β_2 vérifient (1)-(3) et

(4) $$\cos t\, E^1(\beta_0) = \sin t\, E^2(\beta_2) .$$

Notre but prochain est le calcul de la solution générale du système (1)-(4) dans le cas $0 < t < \pi/2$. La substitution

$$\beta_0 = \sin t \; \gamma_0 ,$$

$$\beta_1 = \gamma_1 ,$$

$$\beta_2 = \cos t \; \gamma_2$$

réduit le système (1)-(4) à la forme

(1') $$\nabla^2 \gamma_0 - 2 E^1(\gamma_1) = 0 ,$$

(2') $$\nabla^2 \gamma_1 + 2 E^1(\gamma_0) = 0 ,$$

(3') $$\nabla^2 \gamma_2 - 2 E^2(\gamma_1) = 0 ,$$

(4') $$E^1(\gamma_o) = E^2(\gamma_2) .$$

En appliquant les champs de vecteurs E^2 et E^1 à (1') et (3') resp. nous obtenons

$$\nabla^2 E^2(\gamma_o) - 2 E^1E^2(\gamma_1) = 0 ,$$

$$\nabla^2 E^1(\gamma_2) - 2 E^1E^2(\gamma_1) = 0 .$$

Ainsi $\nabla^2(E^2(\gamma_o) - E^1(\gamma_2)) = 0$, i.e. la fonction $E^2(\gamma_o) - E^1(\gamma_2)$ est harmonique sur T^2; $E^2(\gamma_o)-E^1(\gamma_2)=e_o=$const . De plus, les équations (1') et (4') montrent

$$2 E^1(\gamma_1) = \nabla^2 \gamma_o = E^1E^1(\gamma_o) + E^2E^2(\gamma_o) = 2 E^1E^2(\gamma_2) ,$$

c'est-à-dire $E^1(E^2(\gamma_2)-\gamma_1) = 0$. On obtient de la même façon, en utilisant (3') et (4'), $E^2(E^1(\gamma_o)-\gamma_1) = 0$. Ainsi $E^2(\gamma_2)-\gamma_1 = E^1(\gamma_o)-\gamma_1 = A_o$ = const. et le système (1')-(4') se réduit à la forme:

$$\nabla^2 \gamma_1 + 2(\gamma_1 + A_o) = 0 ,$$

$$E^1(\gamma_o) = E^2(\gamma_2) = \gamma_1 + A_o ,$$

$$E^2(\gamma_o) = E^1(\gamma_2) + e_o .$$

La première équation dit que $\gamma_1 + A_o$ est une fonction propre du laplacien sur T^2 , i.e. [1]

$$\gamma_1(\varphi,\Psi) = a \sin(\varphi+\Psi) + b \sin(\varphi-\Psi) + c \cos(\varphi+\Psi) +$$

$$+ d \cos (\varphi-\Psi) - A_o , \quad 0 \leq \varphi,\Psi < 2\pi$$

où $a,b,c,d \in R$. En utilisant la deuxième et la troisième équations, un calcul facile montre:

$$\gamma_0(\varphi,\Psi) = -a\cos(\varphi+\Psi) - b\cos(\varphi-\Psi) + c\sin(\varphi+\Psi) + d\sin(\varphi-\Psi) + B_0 ,$$

$$\gamma_2(\varphi,\Psi) = -a\cos(\varphi+\Psi) + b\cos(\varphi-\Psi) + c\sin(\varphi+\Psi) - d\sin(\varphi-\Psi) + C_0 ,$$

où $B_0, C_0 \in R$. Par conséquant $\dim K(f_t) = 7$ et à partir de la Proposition 3 on peut déduire que $f_t:T^2 \longrightarrow S^3$ n'est pas infinitésimalement rigide pour $0<t<\pi/2$. Pour déterminer $V(f_t)$ nous devons sélectionner parmi les solutions γ_0 , γ_1 , γ_2 qui satisfont à la relation

$$\|v\|^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = \sin^2 t\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cos^2 t\ \gamma_2^2 = \text{const.}$$

On obtient aisément que si $v \in K(f_t)$ est une déformation harmonique nous avons

$$(a^2+c^2)(b-A_0)=(a^2+c^2)(d-A_0)=(b^2+d^2)(a-A_0)=(b^2+d^2)(c-A_0)=0 .$$

Utilisant cette formule une discussion simple des cas possibles montre que

$$V(f_t)=\operatorname{span}\{u^0,u^1,u^2\} \cup \operatorname{span}\{u^3,u^4,u^5\} \cup \operatorname{span}\{u^6,u^7,u^8\} ,$$

où u^0 , u^1 , u^2 sont comme les fonctions définies plus haut et

$$u^3 = -\sin t\ \sin(\varphi-\Psi)u^0 - \cos(\varphi-\Psi)u^1 + \cos t\ \sin(\varphi-\Psi)u^2 ,$$

$$u^4 = -\sin t\ \cos(\varphi-\Psi)u^0 + \sin(\varphi-\Psi)u^1 + \cos t\ \cos(\varphi-\Psi)u^2 ,$$

$$u^5 = \cos t\ u^0 + \sin t\ u^2 ,$$

$$u^6 = -\sin t\ \sin(\varphi+\Psi)u^0 - \cos(\varphi+\Psi)u^1 - \cos t\ \sin(\varphi+\Psi)u^2 ,$$

$$u^7 = -\sin t\ \cos(\varphi+\Psi)u^0 + \sin(\varphi+\Psi)u^1 - \cos t\ \cos(\varphi+\Psi)u^2 ,$$

$$u^8 = \cos t\ u^0 - \sin t\ u^2 .$$

En particulier, le treillis géométrique de l'application $f_t:T^2 \longrightarrow S^3$ pour $0<t<\pi/2$ est de la forme donnée dans le théorème et l'on trouve facilement que $\operatorname{span} V(f_t)=K(f_t)$. Comme $f_t:T^2 \longrightarrow S^3$ est un plongement non infinitésimalement rigide pour $0<t<\pi/2$, la Proposition 4 montre que f_t est non localement rigide. Par un calcul plus détaillé on peut établir qu'il n'existe pas d'isométrie infinitésimale X sur S^3 telle que $u^2 = X \circ f_t$. (Nous remarquons que le champ de vecteurs u^2 le long de f_t n'est autre qu'une section unitée du fibré vectoriel normal au plongement $f_t : T^2 \longrightarrow S^3$.)

Enfin, dans le cas général $n \geq 3$, définissons u^2 comme aupravant. S'il existe une isométrie infinitésimale X_0 sur S^n telle que $X_0 \circ f_t = u^2$, la projection X de X_0 sur $S^3 \subset S^n$ est de nouveau une isométrie infinitésimale [4] et, comme $\operatorname{im} f \subset S^3$ et u^2 est tangent à S^3, nous constatons que $X \circ f_t = u^2$; c'est une contradiction.

Bibliographie

[1] Berger, M., Gauduchon, P. et Mazet, E.: Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math. 194, Springer Verlag (1971).

[2] Eells, J. et Lemaire, L.: A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 1-68.

[3] Hartman, Ph.: On homotopic harmonic maps, Canad J. Math. 19 (1976), 673-687

[4] Kobayashi, S. Transformation groups in differential geometry, Ergebnisse der Math. 70. Springer Verlag (1972).

[5] Kobayashi, S. et Nomizu, K.: Foundations of differential geometry, Vol. I. John Wiley and Sons (1963).

[6] Lichnerowicz, A.: Variétés Kähleriennes à première classe de Chern non negative et variétés Riemanniennes à courbure Ricci généralisée non negative, J. Diff. Geom. 6 (1971), 47-94.

[7] Sunada, T.: Rigidity of certain harmonic mappings, Inventiones Math. 51 (1979), 297-307.

[8] Tóth, G.: On variations of harmonic maps into spaces of constant curvature, Annali di Matematica (à paraître).

[9] Tóth, G.: On harmonic maps into locally symmetric Riemannian manifolds, Symposia Mathematica, "Conference on invariant metrics, harmonic mappings and related topics" (Rome, 1981) Academic Press, London (à paraître).

[10] Tóth, G.: On rigidity of harmonic mappings into spheres (à paraître).

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences,
H-1053 Budapest, Reáltanoda u. 13-15.

(Received October 10, 1981; in revised form February 15, 1982)