Rendiconti di Matematica
(1) 1982, Vol. 2, Serie VII

Sur les espaces fibrés différentiables munis des groupes de transformations de Lie opérant transversalement aux fibres

par GÁBOR TÓTH (Budapest)

SUMMARY - *In this paper we study compact isometric Lie group actions on a complete Riemannian manifold M with the property that the principal isotropy types are of maximal rank. In case of orbits of uniform dimension we obtain a complete ggeometric description of these actions by means of certain fibering of M with totally geodesic fibres. In case of an Hadamard manifold M we obtain a topological characterization for the existence of exceptional orbits.*

0. Introduction.

Soit M une variété riemannienne complète et soit G un groupe de Lie compact d'isométries de M tel que les groupes d'isotropie en points d'orbites principales sont de rang maximum dans G. D'après un théorème récent de J. SZENTHE, [8], les tranches locales en points d'orbites principales sont uniques. En désignant pars $S \subset M$ le sous-espace des points d'orbites singulières, ces tranches locales définissent une distribution D complètement intégrable sur $M-S$, c'est-à dire D est la distribution normale aux orbites dans $M-S$.

Dans la première partie du prèsent article nous considérons le cas $S=\varnothing$. En ce cas le feuilletage défini par D est un espace fibré différentiable à groupe structural fini.

Nous énonçons le

THÉORÈME 1. *Soit M une variété riemannienne complète et G un groupe de Lie compact d'isométries de M tel que les orbites de* *l'action de G sur M ont la même dimension. Supposons que les groupes d'isotropie en points d'orbites principales sont de rang maximum dans G. Alors, il existe un sous-groupe fermé $H \subset G$ de rang maximum dans G et il existe un espace fibré différentiable $\pi: M \to G/H$ vérifiant les conditions suivantes:*

(i) *Les fibrés de π sont sous-variétés fermées, totalement géodésiques dans M;*

(ii) *Les orbites de l'action de G sur M son revêtements finis de G/H par π;*

(iii) *L'application π est équivariante où G opère sur G/H canoniquement;*

(iv) *Le groupe structural de l'espace fibré $\pi: M \to G/H$ est fini;*

(v) *Il existe un revêtement fini $\lambda: \bar{M} \to M$ tel que la variété $\bar{M}$ est difféomorphe au produit $G(x) \times$ (la fibre-type de π) où $G(x) \subset M$ est une orbite principale de l'action de G sur M;*

(vi) *Si la variété M est orientée la fibre-type de π est aussi orientée.*

Si la variété M est simplement connexe il en résulte que M est difféomorphe au produit $G(x) \times$ (la fibre-type de π) et nous obtenons ainsi un cas particulier d'une théorème de CONNER, [1].

Dans la deuxième partie nous supposons que M est une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle non positive. Il en résulte que $S \neq \emptyset$. Sous cette condition nous obtenons une caractérisation topologique pour l'existence des orbites exceptionnelles formulée dans le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle non positive et soit G un groupe de Lie compact d'isométries de M tel que les groupes d'isotropie en points d'orbites principales sont de rang maximum dans G. Alors, pour qu'il existe une orbite exceptionnelle dans M, il faut et il suffit que l'ensemble de Poincaré relatif $\pi_1(M-S, G(x))$ soit non trivial où $G(x)$ est une orbite principale dans M.*

Si G est un groupe de Lie compact, semi-simple opérant sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G par l'action adjointe, il en résulte que le sous-espace $\mathcal{G}-S$ est simplement connexe.

1. Démonstration du Théorème 1.

A cause de l'hypothèse $S=\emptyset$ la décomposition orthogonale $T_x(M)=T_x(G(x))\oplus D(x), x\in M$, définit une distribution D invariante par l'action de G sur M. Nous désignons par $P\subset M$ le sous-espace des points d'orbites principales. D'après un théorème de SZENTHE, [8], la tranche locale S_x en un point $x\in P$ est unique, $T_x(S_x)=D(x)$, et $S_x\subset M$ est une sous-variété totalement géodésique. Ainsi, S_x est une variété intégrale de la distribution D, c'est-à-dire la restriction $D\,|\,P$ définit une distribution totalement géodésique sur P. Comme le sous-espace $P\subset M$ est dense dans M, en utilisant le théorème de Frobenius, nous obtenons que la distribution D est complètement intégrable sur M. La distribution $D^{\perp}$ normale à D est engendrée par isométries infinitésimales et ainsi, on voit facilement que la distribution D est totalement géodésique sur M. Si nous désignons par $L(x)\subset M$ la feuille de D contenant le point $x\in M$ nous obtenons que $L(x)$ est une sous-variété totalement géodésique dans M. Nous démontrons maintenant que $L(x)$ est fermée dans M. On peut supposer que $x\in P$. Considérons le fibré vectoriel $N(x)$ normal à l'orbite $G(x)$ et désignons par $\varepsilon\colon N(x)\to M$ la restriction $\exp|N(x)$. L'action de G sur M définit une action linéaire de G sur $N(x)$ telle que l'application $\varepsilon\colon N(x)\to M$ est équivariante. Les orbites sur $N(x)$ sont principales parce que la fibre $N_x\subset N(x)$ en x est une tranche globale pour l'action de G sur $N(x)$. Si $v\in N(x)$, $\varepsilon\,|\,G(v)\colon G(v)\to G(\varepsilon(v))$ est une application de rang maximum, c'est-à-dire $\varepsilon\,|\,G(v)$ est un revêtement fini. D'après un théorème de HOPF et SAMELSON, [4], il existe un élément $g\in G$ tel que l'isométrie $g\,|\,G(x)$ a des points singuliers isolés dans $G(x)$. Choisissons un vecteur $X\in\mathcal{G}$ tel que $\operatorname{Exp}X=g$. Alors, X définit des champs de vecteurs $\tilde{X}\in\mathfrak{X}(M)$ et $\tilde{\tilde{X}}\in\mathfrak{X}(N(x))$ par l'action de G sur M et sur $N(x)$, respectivement, et la restriction $\tilde{X}\,|\,G(x)$ a des points singuliers isolés dans $G(x)$. La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(G(x))$ de $G(x)$ est positive, c'est-à-dire il y a un point singulier isolé $x'\in G(x)$ de $X\,|\,G(x)$. La fibre $N_{x'}\subset N(x)$ est un composant connexe de Zero $(\tilde{\tilde{X}})$ et à cause du fait que $\varepsilon\,|\,G(v)\colon G(v)\to$ $\to G(\varepsilon(v))$, $v\in N(x)$, sont revêtements finis on voit facilement que la feuille $\varepsilon(N_{x'})=L(x')$ est un composant connexe de Zero $(\tilde{X})$. Ainsi, [6], p. 60, la feuille $L(x')$ est fermée et comme la distribution D est invariante par l'action de G sur M nous obtenons que la feuille $L(x)$ est aussi fermée.

Soit $N=M/D$ et désignons par $\pi: M \to N$ l'application canonique. Alors, N est un T_1-espace, l'application π est continue et ouverte, et G opère sur N tel que π est une application équivariante. Soit $x \in M$ un point fixé et considérons la restriction de l'action de G sur $L(x)$ $\tau: G \times L(x) \to M$. Ainsi, l'application tangente $\tau_{*(1,x)}: T_{(1,x)}(G \times L(x)) \to$ $\to T_x(M)$ est surjective et nous obtenons que le sous-espace $G(L(x)) \subset M$ est ouvert dans M. D'autre part $G(L(x)) \subset M$ est fermé dans M, c'est-à-dire $G(L(x))=M$. En particulier, le groupe de Lie G opère transitevement sur N. Comme N est un T_1-espace les groupes l'isotropie en points de N sont fermés. On voit que $N=G(\pi(x))=G/H$ où $H=G_{\pi(x)}(\supset G_x)$, c'est-à-dire N est un espace homogène et l'application $\pi: M \to G/H$ est différentiable. Soit $y \in L(x)$ un point fixé et considérons le sous-groupe $H^y=\{g \in G \mid g(y) \in L(x)\} \subset G$. Il en résulte que $G_y \subset H^y$ et le groupe quotient H^y/G_y est fini, c'est-à-dire l'ensemble $L(x) \cap G(x)$ est fini. Nous obtenons que la restriction $\pi \mid G(x): G(x) \to$ $\to G/H$ est un revêtement fini et ainsi l'application $\pi: M \to G/H$ est une submersion. Considérons la sous-algèbre de Lie $\mathcal{G}_{\pi(x)} \subset \mathcal{G}$ de groupe d'isotropie $G_{\pi(x)} \subset G$ en $\pi(x)$. Alors, il existe une sous-variété $U \subset G$, $1 \in U$, vérifiant $(U^{-1} \cdot U) \cap G_{\pi(x)}=\{1\}$ et $T_1(U) \oplus \mathcal{G}_{\pi(x)}=\mathcal{G}$, [3], p. 233. Ainsi, $V=\{g(\pi(x)) \in N \mid g \in U\}$ est une voisinage ouverte du point $\pi(x)$. Définissons l'application $h: \pi^{-1}(V) \to V \times L(x)$ par $h(x')=(\pi(x'), g^{-1}(x'))$ où $x' \in \pi^{-1}(V)$ et $g \in U$ véfifiant $g^{-1}(x') \in L(x)$. On voit facilement que h est un difféomorphisme et nous obtenons que $\pi: M \to G/H$ est un espace fibré différentiable jouissant des propriétés (i) - (iii). Nous pouvons choisir H^y/G_y comme le groupe structural de l'espace fibré $\pi: M \to G/H$. Pour la démonstration de (v) soit $G(x) \subset M$ une orbite principale fixée et considérons le revêtement fini $\pi \mid G(x): G(x) \to G/H$. Soit $\bar{\pi}: \bar{M} \to G(x)$ l'image réciproque de l'espace fibré différentiable $\pi: M \to G/H$ par l'application $\pi \mid G(x)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bar{M} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\bar{\pi}"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\
G(x) \arrow[r, "\pi/G(x)"] & G/H
\end{tikzcd}$$

étant commutatif nous obtenons que l'application $\lambda: \bar{M} \to M$ est un revêtement fini. Définissons l' application $\rho: \bar{M} \to G(x) \times L(x)$ par $\rho(x', x'') = (x', g(x''))$ où $x' \in G(x)$, $x'' \in M$, $\pi(x') = \pi(x'')$ et $g \in G$ vérifiant $g(x') = x$. On voit facilement que ρ est un difféomorphisme et la propriété (v) est prouvée. Si la variété M est orientée la fibre-type $L(x) \subset M$ est aussi orientée parce qu'elle est un composante connexe de Zero $(\tilde{X})$ où $\tilde{X}$ est une isométrie infinitésimale, [6], p. 60.

REMARQUES 1. Si M est une variété compacte, d'après un théorème d' EHRESMANN, [2], la construction de l'application h est superflue comme $\pi: M \to G/H$ est une submersion.

2. Le fibré vectoriel normal à la feuille $L(x)$ peut être muni d'une structure complexe, [6], p. 60. En particulier dim $G(x)$ est paire. (On peut la déduire de $\chi(G(x)) > 0$ aussi).

COROLLAIRE. *Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe et soit G un groupe de Lie compact d'isométries de M tel que les groupes d'isotropie en points d'orbites principales sont de rang maximum dans G. Alors, si $S = \emptyset$ ils n'existent pas des orbites exceptionnelles dans M.*

DÉM. D'après le théorème précédent il existe un revêtement fini $\lambda: \bar{M} \to M$ tel que $\lambda(x', x'') = x''$, $(x', x'') \in \bar{M}$, $\pi(x') = \pi(x'')$, $x' \in G(x)$, $x'' \in M$, où $G(x)$ est une orbite principale fixée dans M. Le groupe de Lie G opère sur $\bar{M}$ par $g(x', x'') = (g(x'), g(x''))$, $(x', x'') \in \bar{M}$, $g \in G$, et l'application $\lambda: \bar{M} \to M$ est équivariante. Comme la variété M est simplement connexe l'application λ est un difféomorphisme, c'est-à-dire il suffit de démontrer qu'ils n'existent pas des orbites exceptionnelles dans $\bar{M}$. Mais la sous-variété $\{x\} \times L(x) \subset \bar{M}$ est une tranche globale pour l'action de groupe de Lie G sur M et ainsi chaque orbite est principale.

2. Les orbites exceptionnelles dans une variété riemannienne à courbure sectionnelle non positive.

Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe à courbure sectionnelle non positive et soit G un groupe de Lie compact d'isométries de M. Choisissons une orbite principale fixée $G(x) \subset M$,

$x \in M$, et considérons le fibré vectorielle $N(x)$ normal à la orbite $G(x)$. L'action de G sur M définit une action linéaire de G sur $N(x)$ telle que la restriction $\exp | N(x) = \varepsilon: N(x) \to M$ est une application équivariante.

LEMME. *Soit $v \in N(x)$ un vecteur fixé. Alors:*

(1) *$G(\varepsilon(v))$ est une orbite singulière $\Leftrightarrow \varepsilon | G(v): G(v) \to G(\varepsilon(v))$ est un espace fibré à fibre-type non discrète;*

(2) *$G(\varepsilon(v))$ est une orbite exceptionnelle $\Leftrightarrow \varepsilon | G(v)$ est un revêtement fini à fibre-type non connexe;*

(3) *$G(\varepsilon(v))$ est une orbite principale $\Leftrightarrow \varepsilon | G(v)$ est un difféomorphisme.*

DÉM. On peut supposer que $v \in N_x$. L'application $\varepsilon | G(v): G(v) \to \to G(\varepsilon(v))$ est une submersion, c'est-à-dire elle définit un espace fibré différentiable. D'ailleurs chaque orbite dans $N(x)$ est principale et ainsi nous avons obtenu (1). Supposons maintenant que $\varepsilon | G(v)$ est un revêtement fini à fibre-type non connexe. Ainsi il existe un vecteur $v' \in N_{x'} \cap G(v), x' \in G(x)$, vérifiant $v \neq v'$ et $\varepsilon(v) = \varepsilon(v')$. A cause de l'hypothèse sur la courbure $\exp_x: T_x(M) \to M$ est un difféomorphisme et il en résulte que $x \neq x'$. Choisissons un élément $g \in G$ tel que $g_*(v') = v$. Nous obtenons que $g(x') = x, g \notin G_x$ et $g \in G_{\varepsilon(v)}$. Ainsi $G_v \subset G_{\varepsilon(v)}$ mais $G_v \neq G_{\varepsilon(v)}$. Supposons maintenant que $G(\varepsilon(v))$ est une orbite principale. Alors il existe un élément $g' \in G$ vérifiant $g' G_x g'^{-1} = G_{\varepsilon(v)}$, c'est-à-dire $G_v \subset g' G_v g'^{-1}$, $G_v \neq g' G_v g'^{-1}$ et il y a une contradiction. Nous déduisons que l'orbite $G(\varepsilon(v))$ est exceptionnelle. Le reste est évident.

REMARQUE. Si $v, v' \in N(x), \varepsilon(v) = \varepsilon(v')$ et l'orbite $G(\varepsilon(v))$ est exceptionnelle les revêtements finis $\varepsilon | G(v)$ et $\varepsilon | G(v')$ sont équivalents.

Pour la démonstration du Théorème 2 supposons que les groupes d'isotropie en points d'orbites principales de M sont de rang maximum dans G.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Désignons par $i: G(x) \to M$ l'inclusion canonique. La suite homotopique exacte du couple $(M-S, G(x))$ implique que $\pi_1(M-S, G(x))$ est trivial si et seulement si $i_*: \pi_1(G(x)) \to \pi_1(M-S)$ est un épimorphisme. Soit $V'_F \subset N(x)$ la voisinage ouverte de la section zéro de $N(x)$ telle que les points du bord de $V'_F \subset N(x)$ sont points focals de l'orbite $G(x)$, [9].

D'après un théorème de SZENTHE, [9], la restriction $\varepsilon \mid V'_F$: $V'_F \to M-S$ est un revêtement, c'est-à-dire $(\varepsilon \mid V'_F)_*$: $\pi_1(V'_F) \to \pi_1(M-S)$ est un monomorphisme. Supposons maintenant que i_*: $\pi_1(G(x)) \to \pi_1(M-S)$ est surjective. Comme $G(x) \subset V'_F$ est un rétract de déformation $(\varepsilon \mid V'_F)_*$ est un isomorphisme et nous obtenons que $\varepsilon \mid V'_F$: $V'_F \to M-S$ est un difféomorphisme. Chaque orbite est principale dans $N(x)$, c'est-à-dire ils n'existent pas des orbites exceptionnelles dans M.

Pour démontrer l'assertion réciproque nous utilisons une méthode de SZENTHE. Supposons qu'ils n'existent pas des orbites exceptionnelles dans M. Si $\varepsilon \mid V'_F$: $V'_F \to M-S$ est un difféomorphisme nous obtenons $\pi_1(M-S, G(x))=0$. Supposons que $\varepsilon \mid V'_F$: $V'_F \to M-S$ est un revêtement à fibré-type non connexe. Soit $G(y), y \in M$, une orbite principale telle que $G(y) \neq G(x)$. Alors, ils existent $v' \in V'_F \cap N_{x'}$, $v'' \in V'_F \cap N_{x''}$, $v' \neq v''$, tels que $\varepsilon(v')=\varepsilon(v'')$. Seulement deux cas sont possibles:

1. $G(v')=G(v'')$.

Dans ce cas $\varepsilon \mid G(v')$: $G(v') \to G(\varepsilon(v'))$ est un revêtement fini à fibre-type non connexe et à cause du Lemme il y a une contradiction.

2. $G(v') \neq G(v'')$.

A cause de l'hypothèse sur la courbure on voit que $x' \neq x''$. Soit un élément $g \in G$ tel que $g(x')=x$. Alors, $G_{x'}=G_y=G_{x''}$ et $\varepsilon(N_{x'})=\varepsilon(N_y)=\varepsilon(N_{x''})$. La restriction $g \mid \varepsilon(N_{x'} \cap V'_F)$ est un difféomorphisme de $\varepsilon(N_{x'} \cap V'_F)$. En utilisant le théorème de P. A. SMITH, comme $\varepsilon(N_{x'} \cap V'_F)$ est difféomorphe a une boule, nous obtenons un point $x_0 \in \varepsilon(N_{x'} \cap V'_F)$ fixe pour g. Ainsi $G_x \subset G_{x_0}$ et $G_x \neq G_{x_0}$, c'est-à-dire $G(x_0)$ est une orbite exceptionnelle et il y a une contradiction. Le Théorème 2 est prouvé.

COROLLAIRE. *Sous les conditions imposées dans le Théorème 2, supposons que les groupes d'isotropie en points d'orbites principales sont les tores maximals dans G. Alors, ils n'existent pas des orbites exceptionnelles dans M si et seulement si le sous-espace $M-S$ est simplement connexe.*

DÉM. L'assertion est évidente parce que chaque orbite principale est simplement connexe.

EXAMPLE. Soit G un groupe de Lie compact, semi-simple opérant sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G par l'action adjointe. Alors, les groupes d'isotropie en points d'orbites principales sont les tores maximals dans G et ils n'existent pas des orbites exceptionnelles dans $\mathcal{G}$, [5]. Ainsi, nous obtenons que le sous-espace $\mathcal{G}-S$ est simplement connexe.

Je voudrais remercier l'aide de M. le professeur SZENTHE et ses conseils pendant l'élaboration de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. E. CONNER: *Orbits of uniform dimension,* Michigan Math. J. 6 (1959), 25-43.

[2] CH. EHRESMANN: *Sur les espaces fibrés différentiables,* C. R. (1947), 1611.

[3] D. GROMOLL - W. KLINGENBERG - W. MEYER: *Riemannsche Geometrie im grossen,* Lecture Notes in Math. 55 (1968).

[4] H. HOPF - H. SAMELSON: *Ein Satz über Wirkungsräume geschlossener Liéscher Gruppen,* Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 13 (1940), 240-251.

[5] WU YI HSIANG: *Cohomology theory of topological transformation groups,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 85.

[6] S. KOBAYASHI: *Transformation groups in differential geometry,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70.

[7] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU: *Foundations of differential geometry,* I. Interscience, New York (1963).

[8] J. SZENTHE: *Sur les voisinages invariants maximums des orbites d'actions orthogonales,* Publ. Math. (à paraître).

[9] J. SZENTHE: *On the cut locus of a principal orbit in a Riemannian manifold of nonpositive sectional curvature,* (à paraître).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 10 ottobre 1980
ed accettato per la pubblicazione l' 11 febbraio 1981,
su parere favorevole di I. Cattaneo Gasparini e di F. Succi.

Gubbio - Tipografia Oderisi Editrice - 1982